Ensemble des entiers naturels ℕ et notions en arithmétique

I – Ensemble des entiers naturels ℕ

II – Multiples d'un entier naturel – Le plus petit multiple commun de deux entiers naturels :

III – Diviseurs d'un entier naturel – Le plus grand diviseur commun de deux entiers naturels :

IV – Nombres premiers – Décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers :

Ensemble des entiers naturels ℕ

I - L'ensemble des entiers naturels ℕ

1 – Présentation de ℕ :

Les nombres 0,1,2 ,3,4…..forment un ensemble que l'on note ℕ.

ℕ ={0,1,2,3,4…….}.

On a parfois besoin de l'ensemble des entiers naturels privé de 0. On le note ℕ*

ℕ* ={1,2,3,4…….}

Exemples

14, 18, 340, 5324 sont des nombres entiers naturels.

On écrit $18 \in \mathbb{N}$ et se lit 18 appartient à ℕ aussi $340 \in \mathbb{N}$; $5324 \in \mathbb{N}$

$-1 \notin \mathbb{N}$; $\frac{2}{3} \notin \mathbb{N}$; $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$; $3{,}12 \notin \mathbb{N}$ $\quad \notin$ n'appartient pas

L'écriture $\frac{2}{3} \notin \mathbb{N}$ se lit $\frac{2}{3}$ n'appartient pas à ℕ

2 – Les nombres entiers naturels pairs et impairs :

a – Définitions :

♣ Tout nombre entier naturel qui s'écrit sous la forme $2k$ avec $k \in \mathbb{N}$ s'appelle un nombre entier naturel pair.

♣ Tout nombre entier naturel qui s'écrit sous la forme $2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$ s'appelle un nombre entier naturel impair.

b – Exemples :

0,14,100 sont des nombres pairs. 1,5, 29 sont des nombres impairs

0,2,4,6,8,10,… sont des nombres pairs. 1,3,5,7,9,11,…sont des nombres impairs

L'ensemble des nombres pairs se note 2N et on a $2\mathbb{N} = \{0,2,4,6,8\ldots\ldots\} = \{2k \; ; \; k \in \mathbb{N}\}$

L'ensemble des nombres impairs $\{1,3,5,7,9\ldots\} = \{2k+1 \; ; \; k \in \mathbb{N}\}$

Ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$

Remarques :

♦ On peut dire que l'ensemble des entiers naturels peut être divisé en deux groupes : si un entier n'est pas pair c'est-à-dire de la forme 2k, il doit être impair de la forme 2k + 1.

♦Deux nombres sont dits de même parité s'ils sont :

- Soit tous les deux pairs.
- Soit tous les deux impairs.

c – Activités :

1) Montrer que la somme de deux entiers naturels pairs est paire

2) Montrer que la somme de deux entiers naturels impairs est paire

3) Montrer que le produit de deux entiers naturels impairs est impair

4) Montrer que le produit d'un entier naturel impair et d'un entier naturel pair est pair

Solution:

1) Montrer que la somme de deux entiers naturels pairs est paire

Soient a et b deux entiers naturels pairs montrons que $a + b$ est pair?

a et b sont pairs donc il existe k et k' deux entiers naturels tels que: $a = 2k$ et $b = 2k'$

$a + b = 2k + 2k' = 2(k + k')$ on pose $k'' = k + k'$ donc $k'' \in \mathbb{N}$

donc $a + b = 2k''$ d'où $a + b$ est pair

2) Montrer que la somme de deux entiers naturels impairs est paire

Soient a et b deux entiers naturels impairs montrons que $a + b$ est pair?

a et b sont impairs donc il existe k et k' deux entiers naturels tels que:

$a = 2k + 1$ et $b = 2k' + 1$

$a + b = 2k + 1 + 2k' + 1 = 2k + 2k' + 2 = 2(k + k' + 1)$

on pose $k'' = k + k' + 1$ donc $k'' \in \mathbb{N}$

donc $a + b = 2k''$ d'où $a + b$ est pair

3) Montrer que le produit de deux entiers naturels impairs est impair

Soient a et b deux entiers naturels impairs montrons que $a \times b$ est impair?

a et b sont impairs donc il existe k et k' deux entiers naturels tels que:

$a = 2k + 1$ et $b = 2k' + 1$

$a \times b = (2k + 1)(2k' + 1) = 4kk' + 2k + 2k' + 1$

$a \times b = 2(2kk' + k + k') + 1$ on pose $k'' = 2kk' + k + k'$ donc $k'' \in \mathbb{N}$

donc $a \times b = 2k'' + 1$ d'où $a \times b$ est impair

4) Montrer que le produit d'un entier naturel impair et d'un entier naturel pair est pair

Soient a un entier naturel pair et b un entier naturel impair montrons que $a \times b$ est pair?

a est pair et b est impair donc il existe k et k' deux entiers naturels tels que:

$a = 2k$ et $b = 2k' + 1$ donc $a \times b = 2k(2k' + 1) = 2(2kk' + k)$

on pose $k'' = 2kk' + k$ donc $k'' \in \mathbb{N}$

donc $a \times b = 2k''$ d'où $a \times b$ est pair

Ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$

d – Propriètes :

Parité du premier nombre	Parité du premier nombre	Parité de la somme	Parité du produit
Pair	Pair	Pair	Pair
Pair	Impair	Impair	Pair
Impair	Pair	Impair	Pair
impair	Impair	Pair	Impair

e – Exercice :

1 - Soit $n \in \mathrm{N}$, étudier la parité des nombres suivants :

a) n(n+1) (Le produit de deux entiers naturels consécutifs)

b) n + (n+1) + (n+2) c) $4\mathbf{n}^2 + 4\mathbf{n} + 1$

2- Soit $n \in \mathrm{N}$, montrer que le nombre $\mathbf{n}^2 + \mathbf{n} + 7$ est impair

Solution:

1) Soit $n \in \mathbb{N}$, étudier la parité des nombres suivants :

a) $n(n+1)$ (Le produit de deux entiers naturels consécutifs)

Si n est pair donc il existe k un entier naturel tel que: $n = 2k$

Donc $n + 1 = 2k + 1$ donc $n(n + 1) = 2k(2k + 1)$

on pose $k' = k(2k + 1)$ donc $k' \in \mathbb{N}$

donc $n(n + 1) = 2k'$ d'où $n(n + 1)$ est pair

Si n est impair donc il existe k un entier naturel tel que: $n = 2k + 1$

Donc $n + 1 = 2k + 1 + 1 = 2(k + 1)$ donc $n(n + 1) = (2k + 1)\,2(k + 1) = 2(2k + 1)(k + 1)$

on pose $k' = (2k + 1)(k + 1)$ donc $k' \in \mathbb{N}$ donc $n(n + 1) = 2k'$

d'où $n(n + 1)$ est pair

Autre méthode: Si n est pair donc $n + 1$ est impair d'où $n(n + 1)$ est pair

Si n est impair donc $n + 1$ est pair d'où $n(n + 1)$ est pair

Car le produit d'un entier naturel pair et d'un entier naturel impair est pair

b) $n + (n+1) + (n+2)$ $n \in \mathbb{N}$ (étudier la parité)

$n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3$

Si n est pair donc il existe k un entier naturel tel que: $n = 2k$

$n + (n+1) + (n+2) = 3\times 2k + 3 = 6k + 2 + 1$

Donc $n + (n+1) + (n+2) = 2(3k + 1) +1$ on pose $k' = 3k + 1$ donc $k' \in \mathbb{N}$

donc $n + (n+1) + (n+2) = 2k' + 1$ d'où $n + (n+1) + (n+2)$ est impair

Si n est impair donc il existe k un entier naturel tel que: $n = 2k + 1$

Donc $n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 6k + 6$ donc $n + (n+1) + (n+2) = 2(3k + 3)$

on pose $k' = 3k + 3$ donc $k' \in \mathbb{N}$ donc $n + (n+1) + (n+2) = 2k'$

d'où $n + (n+1) + (n+2)$ est pair

c) $4n^2 + 4n + 1$ (étudier la parité)

Donc $4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$ on pose $k = 2n^2 + 2n$ donc $k \in \mathbb{N}$

donc $4n^2 + 4n + 1 = 2k + 1$ d'où $4n^2 + 4n + 1$ est impair

Ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$

2- Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que le nombre $n^2 + n + 7$ est impair

On a $n^2 + n + 7 = n(n+1) + 6 + 1$

$n(n+1)$ Le produit de deux nombres consécutifs donc $n(n+1)$ est pair

$n(n+1)$ est pair donc il existe k un entier naturel tel que: $n(n+1) = 2k$

On a $n^2 + n + 7 = 2k + 6 + 1 = 2(k+3) + 1$

on pose $k' = k + 3$ donc $k' \in \mathbb{N}$

On a $n^2 + n + 7 = 2k' + 1$ d'où $n^2 + n + 7$ est impair